第６講　速度ベクトル，共通接線と増減，球の一部の体積

16　xy 平面上を運動する点 P の時刻 $t(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t^2\cos t,\ \ y=t^2\sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を$\theta(t)$とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ．

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような $t(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2とする．このとき不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ．

《15 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17　a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x,\quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1)　a を t で表せ．

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

《15 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18　座標空間の x 軸上に動点 P，Q がある．P，Q は時刻 0 において，原点を出発する．P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く．その後，ともに時刻 1 で停止する．点 P，Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　時刻 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2)　$V(t)$ の最大値を求めよ．

《15 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　速度ベクトル，共通接線と増減，球の一部の体積

16 xy 平面上を運動する点Pの時刻 $t(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t^2\cos t,\quad y=t^2\sin t$$

で表されている．原点をOとし，時刻 t におけるPの速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような $t(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ．

《15 東工大・理系》

【答】 (1) $\dfrac{\pi}{2}$　　(2) 略

【解説】 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$，$\dfrac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$ より

$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ なので，$\vec{l}=(\cos t,\ \sin t)$，

$\vec{m}=(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ とおいたときの $\vec{l}$ と $\vec{m}$ のなす角が $\theta(t)$ である．

ここで $\vec{l}\cdot\vec{m}=2$，$|\vec{l}|=1$，$|\vec{m}|=\sqrt{t^2+4}$ より

$$\vec{l}\cdot\vec{m}=|\vec{l}||\vec{m}|\cos\theta(t) \iff 2=1\cdot\sqrt{t^2+4}\cdot\cos\theta(t) \qquad \therefore\ \cos\theta(t)=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

ここで $\cos\theta(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}\to 0\ (t\to\infty)$ より $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t=0$ で $t>0$ より $2\cos t=t\sin t$ となるが，$\cos t\neq 0$ は明らかなので，この式は $\dfrac{2}{t}=\tan t$ と変形できる．

t_1，t_2 はこの方程式の解なので，$\tan t_1=\dfrac{2}{t_1}$，$\tan t_2=\dfrac{2}{t_2}$ をみたす．

また，$u=\dfrac{2}{t}$ と $u=\tan t$ のグラフを考えると，$0<t_1<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<t_2<\dfrac{3}{2}\pi$ といえる．

このとき

$$\tan(t_2-t_1)=\frac{\tan t_2-\tan t_1}{1+\tan t_2\tan t_1}=\frac{\dfrac{2}{t_2}-\dfrac{2}{t_1}}{1+\dfrac{2}{t_2}\cdot\dfrac{2}{t_1}}=\frac{2(t_1-t_2)}{t_1t_2+4}$$

であるが，$\dfrac{\pi}{2}<t_2-t_1<\dfrac{3}{2}\pi$ で $\tan(t_2-t_1)<0$ より $\dfrac{\pi}{2}<t_2-t_1<\pi$.

よって $t_2-t_1<\pi$ が示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17　a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x,\quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1)　a を t で表せ．

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

《15 北大・理系》

【答】　(1)　$a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$　　(2)　極小値 -1，$t=0$

【解説】　(1)　$y=(x-1)e^x$ より $y'=xe^x$ なので，$x=t$ における接線は

$$y=te^t(x-t)+(t-1)e^t \qquad \therefore\quad y=te^tx+(-t^2+t-1)e^t$$

これと C_2 を連立して

$$te^tx+(-t^2+t-1)e^t=\frac{1}{2e}x^2+a \iff \frac{1}{2e}x^2-te^tx+(t^2-t+1)e^t+a=0$$

となり，この方程式が重解をもつので $(-te^t)^2-4\cdot\frac{1}{2e}\cdot\{(t^2-t+1)e^t+a\}=0$ よって

$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t}$.

(2)　$f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと

$f'(t)=te^{2t+1}+\frac{1}{2}t^2\cdot 2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t=t(t+1)(e^{t+1}-1)e^t$ より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘	-1	↗

となるので，求める**極小値は** $f(0)=\boldsymbol{-1}$ で，そのときの t は $\boldsymbol{t=0}$.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18　座標空間の x 軸上に動点P，Qがある．P，Qは時刻0において，原点を出発する．Pは x 軸の正の方向に，Qは x 軸の負の方向に，ともに速さ1で動く．その後，ともに時刻1で停止する．点P，Qを中心とする半径1の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　時刻 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2)　$V(t)$ の最大値を求めよ．

《15 阪大・理系》

【答】 (1)　$\dfrac{\pi}{3}(-t^3-3t^2+6t+4)$　　(2)　$\dfrac{-4+6\sqrt{3}}{3}\pi\ (t=-1+\sqrt{3})$

【解説】 (1)　時刻 t における A の方程式は $(x-t)^2+y^2+z^2=1$，B の方程式は $(x+t)^2+y^2+z^2=1$ と表せる．

それぞれを y^2+z^2 について解くと，$A：y^2+z^2=-x^2+2tx-t^2+1$，
$B：y^2+z^2=-x^2-2tx-t^2+1$ となるので

$$V(t)=\int_{-1}^{0}\pi(-x^2-2tx-t^2+1)dx+\int_{0}^{1+t}\pi(-x^2+2tx-t^2+1)dx$$

$$=\pi\left\{\left[-\frac{x^3}{3}-tx^2+(-t^2+1)x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2+(-t^2+1)x\right]_{0}^{1+t}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(-t^3-3t^2+6t+4)}$$

(2)　$V'(t)=\pi(-t^2-2t+2)$ より

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		↗		↘	

となるので求める最大値は $V(-1+\sqrt{3})$．

ここで $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\{(-t^2-2t+2)(t+1)+6t+2\}$ より求める最大値は

$$\frac{6(-1+\sqrt{3})+2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{-4+6\sqrt{3}}{3}\pi}.$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。